Name:____________________________ **Klasse:**____ **Mathelehrer:**________________

Duisburger Mathematikwettbewerb 2009/2010

als erste Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

Hinweise: Bei der Mathematik-Olympiade zählt nicht allein die richtige Lösung, auch der Lösungsweg sollte so ordentlich wie möglich dargestellt bzw. erläutert werden.
Das bedeutet: Ein paar Zahlen und Rechnungen hier auf diesem Zettel sind keinesfalls ausreichend!!!
Vergesst nicht die Angabe eures Namens und eurer Klasse.

Abgabe: Bis spätestens 25. September 2009 bei eurem Mathelehrer.

1. Aufgabe

In dieser Aufgabe geht es um Kreise und Geraden, die einander schneiden oder auch nur berühren.

a) Wir beginnen mit einem Kreis und zwei Geraden. Die Geraden sollen vier Schnittpunkte mit dem Kreis haben. Fertige je eine Zeichnung für folgende drei Fälle an:
   - Die Geraden schneiden einander nicht.
   - Die Geraden schneiden einander außerhalb des Kreises.
   - Die Geraden schneiden einander innerhalb des Kreises.

b) Zeichne zwei parallele Geraden. Zeichne einen Kreis so, dass er die eine Parallele berührt und die andere zweimal schneidet. Zeichne nun einen zweiten Kreis in deine Zeichnung, der beide Parallelen berührt. Wo befindet sich der Mittelpunkt deines zweiten Kreises?

2. Aufgabe

Fünf Jungs gründen eine Band „Die lauten Mathematiker“. Der Name ist entstanden, weil alle an der Mathematik-Olympiade teilgenommen und die ersten fünf Plätze belegt haben.

Die Jungen spielen Schlagzeug, Saxophon, Keyboard und Gitarre. Paul singt dazu.

(1) Für Stefan haben sich die Keyboardstunden gelohnt.
(2) Paul war traurig, dass er nicht Erster wurde.
(3) Nils ist nicht Erster, aber auch nicht Vierter geworden. Er spielt Schlagzeug.
(4) Timo ist Zweiter geworden, er spielt keine Gitarre.
(5) Guido freut sich auch über seinen fünften Platz.

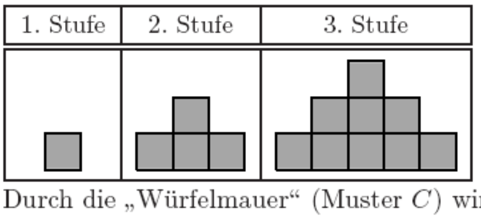
a) Welche Plätze haben die Jungen jeweils bei der Mathematik-Olympiade belegt?

b) Wer hat in der Band welche Aufgabe?

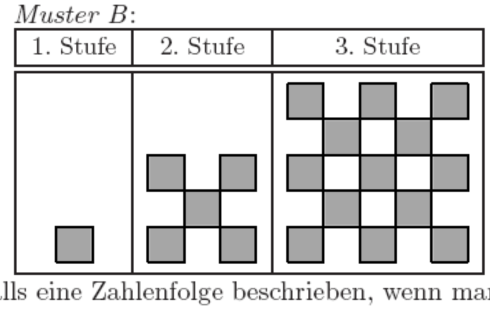
3. Aufgabe

a) Durch die Muster A und B wird jeweils eine Zahlenfolge beschrieben, wenn man die Anzahl der kleinen Quadrate zählt. Setze die Zahlenfolgen bis zur 10. Zahl fort, ohne die Muster zu zeichnen.
Versuche bei Muster A, eine Methode zu finden, mit der du leicht z. B. die 21. Zahl oder die 77. Zahl berechnen kannst.

Muster A:

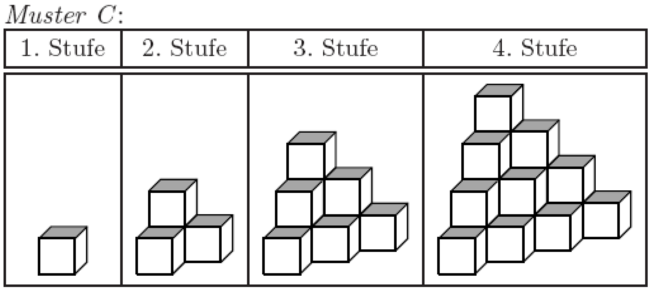


Muster B:



b) Durch die „Würfelmauer“ (Muster C) wird ebenfalls eine Zahlenfolge beschrieben, wenn man die Anzahl der Würfel zählt. Schreibe die Folge bis zur 10. Zahl auf.

Muster C:



Name:____________________________ Klasse:____ Mathelehrer:_______________

Duisburger Mathematikwettbewerb 2009/2010

als erste Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

Hinweise: Bei der Mathematik-Olympiade zählt nicht allein die richtige Lösung, auch der Lösungsweg sollte so ordentlich wie möglich dargestellt bzw. erläutert werden.
Das bedeutet: Ein paar Zahlen und Rechnungen hier auf diesem Zettel sind keinesfalls ausreichend!!!
Vergesst nicht die Angabe eures Namens und eurer Klasse.

Abgabe: Bis spätestens 25. September 2009 bei eurem Mathelehrer.

1. Aufgabe

In dieser Aufgabe geht es um Kreise und Geraden, die einander schneiden oder auch nur berühren.

a) Wir beginnen mit einem Kreis und zwei Geraden. Die Geraden sollen vier Schnittpunkte mit dem Kreis haben.
Fertige je eine Zeichnung für folgende drei Fälle an:
   – Die Geraden schneiden einander nicht.
   – Die Geraden schneiden einander außerhalb des Kreises.
   – Die Geraden schneiden einander innerhalb des Kreises.

b) Zeichne zwei parallele Geraden.
Zeichne einen Kreis so, dass er die eine Parallele berührt und die andere zweimal schneidet.
Zeichne nun einen zweiten Kreis in deine Zeichnung, der beide Parallelen berührt. Wo befindet sich der Mittelpunkt deines zweiten Kreises?

c) Zeichne zwei Kreise, die einander in zwei Punkten schneiden.
Nun zeichnest du die Gerade durch die beiden Schnittpunkte; dann wählst du dir einen der beiden Schnittpunkte und zeichnest die senkrechte Gerade zu der ersten Gerade durch diesen Schnittpunkt.
Wie viele Schnittpunkte hat diese zweite Gerade mit den Kreisen?

2. Aufgabe

Gezeichnete Gleichungen:

Drei Kugeln sind so schwer wie zwei Zylinder. Zwei Würfel sind so schwer wie fünf Kugeln. Wie viele Zylinder sind so schwer wie drei Würfel?

3. Aufgabe

Wenn man einen Roboter (oder einen Zeichenstift) auf einem quadratischen Kästchengitter bewegen will, so kann man dies durch eine Folge von drei Grundkommandos machen:

G – ändere deine Richtung nicht und gehe eine Kantenlänge.
L – drehe dich nach links um 90° und gehe eine Kantenlänge.
R – drehe dich nach rechts um 90° und gehe eine Kantenlänge.

Grundsätzlich soll am Anfang der Roboter mit „dem Gesicht nach rechts“ stehen. Wenn er also von dort nach oben laufen soll, lautet das erste Kommando „L“, wenn er von dort nach rechts laufen soll, lautet das erste Kommando „G“, wenn er vom Anfang nach unten laufen soll, lautet das erste Kommando „R“.

Beispiel: Zu der nebenstehenden Figur gehört die Kommandofolge GGLR.

a) Gib eine Kommandofolge an, die den Roboter *insgesamt* um 4 Schritte nach rechts und drei Schritte nach oben führt und aus 9 Grundkommandos besteht. Zeichne die zugehörige Figur.

b) Gib eine Kommandofolge mit kleinstmöglicher Länge an, die ein Quadrat mit der Kantenlänge 3 erzeugt und bei einem zweiten Durchlauf wiederum dieses Quadrat malt.

c) Wir geben eine Kommandofolge vor: (1) LLRRRLLLR
Zeichne auf kariertem Papier die Figur, die entsteht, wenn die Kommandofolge viermal hintereinander durchgeführt wird.

Name:____________________________ **Klasse:**____ **Mathelehrer:**_______________

Duisburger Mathematikwettbewerb 2009/2010

als erste Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

Hinweise: Bei der Mathematik-Olympiade zählt nicht allein die richtige Lösung, auch der Lösungsweg sollte so ordentlich wie möglich dargestellt bzw. erläutert werden.
Das bedeutet: Ein paar Zahlen und Rechnungen hier auf diesem Zettel sind keinesfalls ausreichend!!!
Vergesst nicht die Angabe eures Namens und eurer Klasse.

Abgabe: Bis spätestens 25. September 2009 bei eurem Mathelehrer.

1. Aufgabe

Die Firma Hausbau soll mit Baggern 10 gleich große Gruben für Fundamente von Einfamilienhäusern ausheben. Sie sollen in 7 Tagen fertig sein. Dazu müssen 8 Arbeiter täglich 8 Stunden arbeiten.

Eine Grube wird vor Beginn der Arbeit abbestellt. Ein Arbeiter wird am Ende des 4. Tages krank, ein weiterer am Ende des 6. Tages. Beide fallen bis zum Ende der Bauarbeiten aus.

Können die 9 Gruben in den 7 Tagen ausgehoben werden, ohne dass Überstunden gemacht werden müssen?

2. Aufgabe

Die unten stehende Figur besteht aus gleich großen Quadraten, in die jeweils eine Zahl eingetragen ist. Diese Figur soll in vier Teilfiguren zerlegt werden, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(1) Die Teilfiguren sind form- und flächeninhaltsgleich (also in diesem Sinne kongruent).

(2) Addiert man die in den Quadraten einer jeden Teilfigur eingetragenen Zahlen, dann sind diese Summen gleich.

Gib eine Zerlegung an, welche die genannten Bedingungen erfüllt.

	12	14	13			
5	8	11	3	2	7	17
15	10	9	3	18	19	6
			4	16	8	

3. Aufgabe

Die 1. Stufe der 49. Mathematik-Olympiade findet im Jahr 2009 statt. Jens behauptet: „Man kann die Jahreszahl 2009 so in zwei Summanden zerlegen, dass deren größter gemeinsamer Teiler die Zahl 49 ist.“ Als Beispiel für seine Behauptung gibt er 931 und 1078 mit der Summe 2009 und dem größten gemeinsamen Teiler 49 an.

a) Überprüfe die Behauptung von Jens.

b) Ermittle die Anzahl aller geordneten Paare $(a; b)$ aus positiven ganzen Zahlen mit der Summe $a+b = 2009$ und dem größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a; b) = 49$.

c) Weise nach, dass es kein Zahlenpaar $(a; b)$ gibt, für das $a + b = 2010$ und $\mathrm{ggT}(a; b) = 50$ gilt.

d) In welchem Jahr findet die nächste 1. Stufe der Mathematik-Olympiade statt, zu der es wieder mindestens ein geordnetes Paar $(a; b)$ von positiven ganzen Zahlen a und b derart gibt, dass die Jahreszahl die Summe von a und b ist und deren größter gemeinsamer Teiler $\mathrm{ggT}(a; b)$ die Nummer der Olympiade ist? Ermittle die Anzahl dieser geordneten Paare $(a; b)$.

Name:_________________________________ **Klasse:_____** **Mathelehrer:__________________**

Duisburger Mathematikwettbewerb 2009/2010

als erste Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

Hinweise: Bei der Mathematik-Olympiade zählt nicht allein die richtige Lösung, auch der Lösungsweg sollte so ordentlich wie möglich dargestellt bzw. erläutert werden.
Das bedeutet: Ein paar Zahlen und Rechnungen hier auf diesem Zettel sind keinesfalls ausreichend!!!
Vergesst nicht die Angabe eures Namens und eurer Klasse.

Abgabe: Bis spätestens 25. September 2009 bei eurem Mathelehrer.

1. Aufgabe

Ein Gutsbesitzer musste wegen Futtermangels 50 Schafe verkaufen, da sonst sein Vorrat anstatt für 10 Wochen nur für 9 Wochen gereicht hätte.

Wie viele Schafe hatte der Gutsbesitzer vor dem Verkauf der 50 Schafe?

2. Aufgabe

Alle Zahlen, die in dieser Aufgabe ermittelt werden sollen, sind positiv und ganz.

Ermittle alle dreistelligen Zahlen z, welche die drei Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen.

(1) Die Zahl z hat die Quersumme 14.

(2) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer.

(3) Vertauscht man die Einerziffer und die Hunderterziffer, so ist z um 198 kleiner als die Zahl, die man durch diesen Tausch erhält.

3. Aufgabe

Wir betrachten ein Rechteck $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt S. Im Punkt A ist die Senkrechte auf die Gerade AC errichtet. Diese schneidet die Verlängerung der Diagonalen $\overline{BD}$ im Punkt E. Außerdem gilt:

(1) Die Diagonale $\overline{AC}$ ist 80 mm lang.

(2) Die Größe des Winkels BAC beträgt 30°.

a) Fertige eine Zeichnung der Figur an, die alle Voraussetzungen erfüllt, und ermittle durch Messung die Länge der Strecke $\overline{DE}$.

b) Ermittle die Länge der Strecke $\overline{DE}$ durch Rechnung. Begründe deinen Rechenweg.

Name:____________________________ **Klasse:**____ **Mathelehrer:**_______________

Duisburger Mathematikwettbewerb 2009/2010

als erste Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

Hinweise: Bei der Mathematik-Olympiade zählt nicht allein die richtige Lösung, auch der Lösungsweg sollte so ordentlich wie möglich dargestellt bzw. erläutert werden.
Das bedeutet: Ein paar Zahlen und Rechnungen hier auf diesem Zettel sind keinesfalls ausreichend!!!
Vergesst nicht die Angabe eures Namens und eurer Klasse.

Abgabe: Bis spätestens 25. September 2009 bei eurem Mathelehrer.

1. Aufgabe

Tina und Toni berechnen das Ergebnis einer Aufgabe mit verschiedenen Taschenrechnern. Tina erhält 3,9999999, während Tonis Rechner die Zahl 4 anzeigt. Schnell sind sie sich einig, dass bei Benutzung eines Taschenrechners Rundungsfehler eine Rolle spielen können. Vielleicht stimmt eines der Ergebnisse, vielleicht liegt das richtige Resultat auch dazwischen.

Entscheide unter Verwendung von Umformungsregeln, welche der folgenden Rechenterme eine natürliche Zahl darstellen.

a) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

c) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{16}$

d) $\sqrt{\left(15+\sqrt{104}\right)\cdot\left(15-\sqrt{104}\right)}$

2. Aufgabe

Beweise:

a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind zwei seiner Höhen gleich lang.

b) Wenn zwei Höhen eines Dreiecks gleich lang sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

3. Aufgabe

Eine Geheimzahl g soll durch einen Supervisor (Aufseher) an n Personen $P_1, \ldots, P_n$ verschlüsselt mitgeteilt werden, so dass gilt: Erst wenn eine bestimmte Mindestanzahl von Personen zusammenkommt, sollen sie in der Lage sein, die Geheimzahl g zu bestimmen.

Die Geheimzahl g sei 2009, die Anzahl der Personen sei $n = 5$. Der Supervisor wählt eine lineare Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = 2x + 2009$ und die 5 paarweise verschiedenen reellen Zahlen $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $x_4 = 40$, $x_5 = 50$. Er teilt jeder Person P_i jeweils die Zahl x_i und den Funktionswert $y_i = f(x_i)$ mit, d. h. P_1 erhält die Zahl $x_1 = 10$ und den Wert $y_1 = 2029$, P_2 erhält $x_2 = 20$ und $y_2 = 2049$ u. s. w. Die konkrete Funktionsgleichung verrät der Supervisor nicht. Jedoch wissen alle Personen, dass eine lineare Funktion f gewählt wurde und dass die Geheimzahl g der Funktionswert von f an der Stelle Null ist.

Wie viele Personen müssen zusammenkommen, damit die Geheimzahl g von ihnen bestimmt werden kann? Und wie kann die Geheimzahl bestimmt werden?

Name:____________________________ **Klasse:**____ **Mathelehrer:**________________

Duisburger Mathematikwettbewerb 2009/2010

als erste Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10

Hinweise: Bei der Mathematik-Olympiade zählt nicht allein die richtige Lösung, auch der Lösungsweg sollte so ordentlich wie möglich dargestellt bzw. erläutert werden.
Das bedeutet: Ein paar Zahlen und Rechnungen hier auf diesem Zettel sind keinesfalls ausreichend!!!
Vergesst nicht die Angabe eures Namens und eurer Klasse.

Abgabe: Bis spätestens 25. September 2009 bei eurem Mathelehrer.

1. Aufgabe

Finde alle ganzen Zahlen n, für die $n^2 - 3$ ein ganzzahliges Vielfaches von $n + 3$ ist.

2. Aufgabe

Gegeben ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ der Länge $|AB| = 6$. Der Lotfußpunkt von C auf $\overline{AB}$ sei D. Im Inneren von $\overline{CD}$ wird ein beliebiger Punkt P gewählt. M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PD}$. Durch P und M werden Parallelen zur Geraden AB gelegt. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Dreiecksseiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bilden ein Trapez.

Für welche Lage von P ist der Flächeninhalt dieses Trapezes am größten?

3. Aufgabe

Eine Geheimzahl g soll durch einen Supervisor (Aufseher) an n Personen $P_1, \ldots, P_n$ verschlüsselt mitgeteilt werden, so dass gilt: Erst wenn eine bestimmte Mindestanzahl von Personen zusammenkommt, sollen sie in der Lage sein, die Geheimzahl g zu bestimmen.

a) Die Geheimzahl g sei 2009, die Anzahl der Personen sei $n = 5$. Der Supervisor wählt eine lineare Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = 2x + 2009$ und die 5 paarweise verschiedenen reellen Zahlen $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $x_4 = 40$, $x_5 = 50$. Er teilt jeder Person P_i jeweils die Zahl x_i und den Funktionswert $y_i = f(x_i)$ mit, d. h. P_1 erhält die Zahl $x_1 = 10$ und den Wert $y_1 = 2029$, P_2 erhält $x_2 = 20$ und $y_2 = 2049$ u. s. w. Die konkrete Funktionsgleichung verrät der Supervisor nicht. Jedoch wissen alle Personen, dass eine lineare Funktion f gewählt wurde und dass die Geheimzahl g der Funktionswert von f an der Stelle Null ist.
Wie viele Personen müssen zusammenkommen, damit die Geheimzahl g von ihnen bestimmt werden kann? Und wie kann die Geheimzahl bestimmt werden?

b) Wir betrachten nun den allgemeinen Fall mit n Personen $P_1, \ldots, P_n$. Der Supervisor wählt eine quadratische Funktion und wieder n paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Er teilt jeder Person P_i die Zahl x_i und den Funktionswert $y_i = f(x_i)$ mit. Die Personen wissen, dass eine quadratische Funktion der Form $y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + g$ mit $a \neq 0$ gewählt wurde, sie kennen jedoch nicht die konkreten Werte von a und b und erst recht nicht den von g.
Wie viele Personen müssen jetzt zusammenkommen, damit die Geheimzahl g von ihnen bestimmt werden kann und wie können sie die Geheimzahl bestimmen?
Überprüfen Sie zunächst Ihr Verfahren, indem Sie von den Zahlenpaaren

$$(x_i; y_i) \in \{(1; -1), (2; -3), (3; -1), (4; 5), (5; 15), (6; 29)\}$$

die benötigte Anzahl von Paaren auswählen und die durch sie festgelegte Geheimzahl g berechnen.
Weise dann allgemein nach, dass nach Deinem Verfahren die Geheimzahl für jede quadratische Funktion eindeutig bestimmt werden kann.

Name:____________________________ **Klasse:**____ **Mathelehrer:**_______________

Duisburger Mathematikwettbewerb 2009/2010

als erste Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klassen 11 - 13

Hinweise: Bei der Mathematik-Olympiade zählt nicht allein die richtige Lösung, auch der Lösungsweg sollte so ordentlich wie möglich dargestellt bzw. erläutert werden.
Das bedeutet: Ein paar Zahlen und Rechnungen hier auf diesem Zettel sind keinesfalls ausreichend!!!
Vergesst nicht die Angabe eures Namens und eurer Klasse.

Abgabe: Bis spätestens 25. September 2009 bei eurem Mathelehrer.

1. Aufgabe

Man ermittle für jede reelle Zahl a alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\big||x-1|+x-3\big| < a$$

erfüllen.

2. Aufgabe

Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre dessen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ in E und F. Der Umkreis des Dreiecks BFE schneide die Gerade AC außer in F noch in M, und analog bezeichne N den von E verschiedenen Schnittpunkt des Umkreises von Dreieck CFE mit der Geraden AB. Man beweise, dass die Gerade MN den Inkreis des Dreiecks ABC berührt.

3. Aufgabe

Ulrike und Veit spielen mit Kieseln. Dazu füllen sie zwei Schalen mit jeweils der gleichen Anzahl $n > 1$ von Kieselsteinen und wechseln sich in den Zügen ab. Ulrike beginnt.

Derjenige Spieler, der am Zug ist, leert eine beliebige Schale und teilt den Inhalt der anderen Schale auf beide so auf, dass keine Schale leer bleibt. Wer keinen Zug mehr ausführen kann, hat verloren, und das Spiel ist beendet.

Man untersuche, ob Ulrike oder ob Veit die Möglichkeit hat, den Sieg zu erzwingen. Man gebe eine Spielweise an, mit der dies möglich ist.

4. Aufgabe

In den Mittelpunkten der Seitenflächen eines Würfels mit der Kantenlänge a werden nach außen weisende senkrechte Strecken der Länge h errichtet. Die sechs nicht auf der Oberfläche des Würfels liegenden Endpunkte dieser Strecken bilden die Ecken eines durch acht gleichseitige Dreiecke begrenzten Körpers, eines sogenannten Oktaeders.

a) Wie groß ist h, wenn das Oktaeder die Kantenlänge $2a$ hat?

b) Man untersuche, ob in diesem Fall der Würfel ganz im Inneren des Oktaeders liegt.